5 Grundlagen der Finanzmathematik

In diesem Kapitel lernen wir die Grundlagen der Finanzmathematik kennen.

5.1 Grundbegriffe der Finanzmathematik - 1

Definition 5.1. (i) Zinsen:

Entgelt für die leihweise Überlassung eines Geldbetrages, den man *Kapital* nennt.

(ii) Zinsfuß (p): Zinsen pro Jahr für ein Kapital von 100 €.

(iii) Zinssatz (i): $i = \frac{p}{100}$

(iv) Zinsfaktor (q): $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$

(v) Nachschüssige Zinsen:

Zinsen, die jeweils am *Ende* einer Periode fällig werden.

(vi) Vorschüssige Zinsen:

Zinsen, die jeweils am *Anfang* einer Periode fällig werden.

5.2 Grundbegriffe der Finanzmathematik - 2

Definition 5.2. (i) Verzinsung zu Zinseszinsen:

Verzinsung, bei der fällig gewordene Zinsen dem Kapital hinzugerechnet und mitverzinst werden.

(ii) Anfangskapital (K_0):

Kapital am *Anfang* eines Betrachtungszeitraumes.

(iii) Endkapital (K_n):

Kapital am *Ende* eines Betrachtungszeitraumes von n Perioden.

(iv) Rente:

Regelmäßige, in gleichen Zeitabständen fällige Zahlung.

5.3 Zinseszinsformel

Definition 5.3. Bei Berücksichtigung *nachschüssiger Zinseszinen* wächst ein Anfangskapital K_0 bei einem Zinsfuß von p nach n Jahren auf ein Endkapital K_n wie folgt an:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

5.4 Barwertformel

Definition 5.4. Die Bestimmung von K_0 bei gegebenem K_n, q und n durch Auflösen der Zinseszinsformel bezeichnet man als Bestimmung des **Barwertes** einer zukünftigen Zahlung.

Häufig spricht man auch von **Abzinsung** oder **Diskontierung** eines Kapitals:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

5.5 Zinsfuß und Laufzeit

Definition 5.5. Wenn man die Zinseszinsformel nach dem Zinsfuß p bzw. der Laufzeit n auflöst, erhält man:

Zinsfuß: $\quad p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_o}} - 1\right)$

Laufzeit: $\quad n = \frac{log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{log(q)} = \frac{log(K_n) - log(K_0)}{log(1 + \frac{p}{100})}$

5.6 Unterjährige Verzinsung

Definition 5.6. Werden die Zinsen nach $\frac{1}{m}$ Jahr gutgeschrieben und dann mit verzinst, so wächst ein Anfangskapital K_0 bei einem Zinsfuß von p nach n Jahren auf ein Endkapital K_n wie folgt an:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}$$

Hier sind als Spezialfälle enthalten:

- Jährliche Verzinsung: m = 1

- Halbjährliche Verzinsung: m = 2

- Vierteljährliche Verzinsung: m = 4

- Monatliche Verzinsung: m = 12

- Tägliche Verzinsung:

  m = 360 (Deutschland) bzw. m = 365 (366) sonst.

5.7 Stetige Verzinsung

Definition 5.7. Läßt man bei unterjähriger Verzinsung die Anzahl m der Unterzeiträume immer größer werden, dann werden die Zeitintervalle immer kleiner.

Im Grenzfall für $m \to \infty$ werden die Zinsen in jedem Moment dem Kapital zugeschlagen und dann mit verzinst.

Dies nennt man stetige Verzinsung.

Bei stetiger Verzinsung wächst ein Anfangskapital K_0 bei einem Zinsfuß von p nach n Jahren auf ein Endkapital K_n wie folgt an:

$$K_n = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot n}$$

Dabei ist $e = 2{,}718\ldots$ die sogenannte EULERsche Zahl.

5.8 Vorbemerkung zur Rentenrechnung

Definition 5.8. Eine regelmäßige, in gleichen Zeitabständen fällige Zahlung nennt man Rente.

Die einzelnen Zahlungen, die oft die gleiche Höhe besitzen, nennt man Rentenrate oder kurz Rate und bezeichnet sie mit r.

Werden die Raten zu Beginn eines Jahres fällig, handelt es sich um eine vorschüssige Rente, werden sie dagegen am Jahresende fällig, hat man es mit einer nachschüssigen Rente zu tun.

Uns interessiert im Zusammenhang mit Renten vor allem der Gesamtwert, den eine Rente am Anfang und/oder am Ende der Rentenzahlungen hat.

Der Endwert einer Rente ist die Summe der Endwerte der einzelnen Rentenraten r am Ende des n-ten Jahres unter Berücksichtigung von Zinseszinsen.

5.9 Nachschüssige Rente

Nachschüssige Rente

Dazu führen wir folgende Überlegung für eine **nachschüssige Rente** durch:

Die Rate verzinst sich am Ende des 1. Jahres für $n - 1$ Jahre,

die Rate verzinst sich am Ende des 2. Jahres für $n - 2$ Jahre,
u.s.w.

Die Rate des vorletzten Jahres verzinst sich noch für 1 Jahr,

wogegen die Rate des letzten Jahres überhaupt keine Zinsen mehr bringt.

Übersicht bringt folgende Tabelle:

Nachschüssige Rente

Jahr	Rate	Anzahl der Jahre für die sich die verzinst	Endwert der Rate
1	r	n - 1	$r \cdot q^{n-1}$
2	r	n - 2	$r \cdot q^{n-2}$
3	r	n - 3	$r \cdot q^{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n - 2	r	2	$r \cdot q^2$
n - 1	r	1	$r \cdot q$
n	r	0	r

Tabelle 13: Nachschüssige Rente

Hiermit errechnet sich - als endliche geometrische Reihe - der Endwert R_n der Rente durch Addition der Endwerte der einzelnen Raten, also als Summe der Werte in der letzten Spalte:

$$R_n = r + r \cdot q + r \cdot q^2 + \cdots + r \cdot q^{n-1}$$

Mit 4.6 folgt nun die Formel für den Endwert der Rente:

5.10 Renten-Endwert (nachschüssig)

Definition 5.10. Der Endwert R_n einer nachschüssigen Rente (nachschüssiger Rentenendwert) mit der Rate r und dem Zinsfaktor q beträgt

$$R_n = r \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

5.11 Renten-Rate (nachschüssig)

Definition 5.11. Löst man die Rentenendwertformel nach der Rate r auf, erhält man

$$r = R_n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

5.12 Renten-Barwert (nachschüssig)

Definition 5.12. Bei verschiedenen Anwendungen der Rentenrechnung entsteht häufig die Frage nach dem gegenwärtigen Wert R_0 einer Rente, den man als **Rentenbarwert** oder **Kapitalwert der Rente** bezeichnet.

Diesen erhält man durch Abzinsung des Endwertes der Rente R_n auf den Beginn der Rentenzahlungen.

Der Barwert R_0 einer nachschüssigen Rente beträgt

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

5.13 Vorschüssige Rente

Definition 5.13. Bei einer **vorschüssigen Rente** gilt folgendes:

Jede Rate wird zu **Beginn** eines Jahres gezahlt und damit gegenüber der nachschüssigen Rente ein Jahr länger verzinst.

Die Formeln unterscheiden sich von denen für die nachschüssige Rente nur um den Faktor q bzw. $\frac{1}{q}$.

Für eine vorschüssige Rente mit der Rate r^* , dem Zinsfaktor q, dem Endwert R_n^* und dem Barwert R_0^* gilt:

$$R_n^* = r^* \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$R_0^* = \frac{R_n^*}{q^n} = \frac{r^*}{q^{n-1}} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$r^* = \frac{R_n^*}{q} \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

5.14 Vorbemerkung zur Tilgungsrechnung

Definition 5.14. Werden Schulden nicht durch Zahlung eines Gesamtbetrages abgelöst, sondern in Teilbeträgen, den sogenannten **Raten** , so spricht man von **Tilgungs-** oder **Amortisationsschulden**.

Dabei bezeichnet man die jährlich aufzubringenden Leistungen des Schuldners als **Annuitäten**.

Eine Annuität setzt sich zusammen aus den jeweils fälligen Zinsen auf die Restschuld (das ist der noch nicht getilgte Teil der Gesamtschuld) und dem Teilbetrag der Rückzahlung (**Tilgungsrate**).

Eine Zusammenstellung der in den einzelnen Jahren über die gesamte Dauer zu erbringenden Annuitäten, Zinsen und Tilgungsraten heißt **Tilgungsplan** .

5.15 Vorbemerkung zur Annuitätentilgung

Definition 5.15. Wir werden nun den Fall der sogenannten **Annuitätentilgung** behandeln. Hierbei wird von konstanten Annuitäten über den gesamten Zeitraum der Tilgung ausgegangen.

Da die zu verzinsende Restschuld von Jahr zu Jahr geringer wird, sinken die jährlich zu zahlenden Zinsen. Der Tilgungsbetrag wird dann, wegen der konstanten Annuität von Jahr zu Jahr größer.

5.16 Annuitätentilgung

Definition 5.16. Um eine Schuld K_0 in n Jahren bei einem Zinsfaktor q und nachschüssiger Verzinsung des Restwertes zu tilgen, ist eine jährliche konstante Annuität von

$$A = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (1-q)}{1-q^n}$$

erforderlich.